VII prova scritta: seconda parte

15 febbraio 2017

Sia

$$f(x) = \sqrt{\left|\frac{x^3}{x-1}\right|}.$$

(a) Studiare la funzione $f(x)$ determinandone il dominio, limiti, intervalli di crescenza/decrescenza, eventuali massimi o minimi, intervalli di convessità, flessi ed asintoti per $x \to \pm\infty$). Tracciarne un grafico qualitativo.

(b) Dire se converge l'integrale improprio $\int_0^2 f(x)dx$.

(c) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = x + \lambda$.

(a) Notiamo che f è definita per ogni $x \neq 0$ ed è sempre non negativa. Inoltre si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty.$$

Quando $x \notin \{0,1\}$ l'argomento della radice è positivo e possiamo scrivere $f(x) = \exp(\frac{1}{2}\log|g(x)|$ con $g(x) := \frac{x^3}{x-1}$. Di conseguenza f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ e

$$f'(x) = f(x)\frac{g'(x)}{2g(x)}, \qquad f''(x) = f(x)\frac{2g''(x)g(x) - (g'(x))^2}{4(g(x))^2}.$$

Svolgendo i calcoli otteniamo quindi che

$$f'(x) = \sqrt{\left|\frac{x^3}{x-1}\right|}\cdot\frac{x-3/2}{x^2-x}, \qquad f''(x) = \sqrt{\left|\frac{x^3}{x-1}\right|}\cdot\frac{3}{4(x^2-x)^2}.$$

Dato che $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$, f è continua e derivabile anche nell'origine, con $f'(0) = 0$; tuttavia f'' non è definita in 0. Dall'espressione della derivata otteniamo che f è crescente sugli intervalli $[0,1[$ e $[3/2,+\infty[$, mentre è decrescente su $]-\infty,0]$ e $]1,3/2]$. Dato che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \neq 1$ la funzione f è convessa su $]-\infty,1[$ e su $]1,+\infty[$.

La funzione f non ammette massimo (dato che $\sup f = +\infty$) ma ha minimi locali in $x = 0$ ed $x = 3/2$. In effetti $x = 0$ è un punto di minimo assoluto: $\min f = f(0) = 0$.

Scrivendo $f(x) = |x|\sqrt{\left|\frac{x}{x-1}\right|}$ notiamo che

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + o(x) \text{ per } x \to +\infty, \qquad f(x) = -x - \frac{1}{2} + o(x) \text{ per } x \to -\infty,$$

pertanto f ha asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

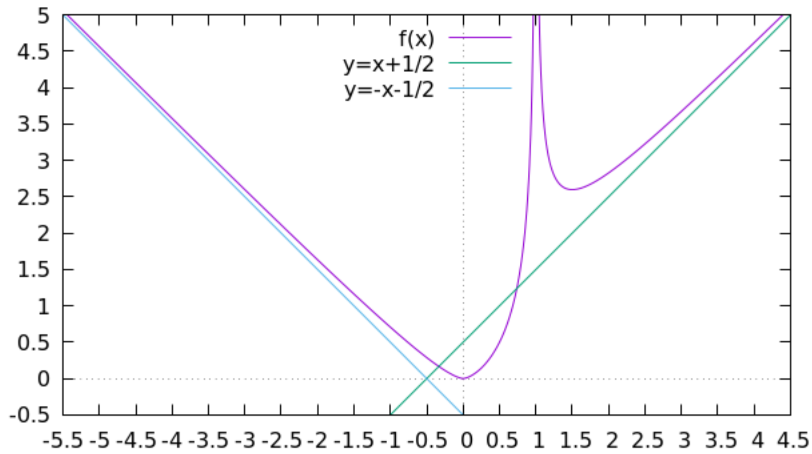

Figure 1: Confronto tra il grafico di y=f(x) e quello degli asintoti obliqui.

(b) L'integrale in questione è improprio perché f è superiormente illimitata in un intorno del punto $x = 1$; tuttavia dato che $f(x) \sim |x-1|^{-1/2}$ per $x \to 1$ il criterio del confronto asintotico ci garantisce che questo integrale improprio è convergente.

(c) Detto x_* l'unico minimo della funzione $\phi(x) = f(x) - x$ e posto $\lambda_* := f(x)_* - x_*$, vediamo che:

- se $\lambda < \lambda_*$ l'equazione $f(x) = x + \lambda$ non ha nessuna soluzione;
- se $\lambda = \lambda_*$ l'equazione $f(x) = x + \lambda$ ha una soluzione;
- se $1/2 \geq \lambda > \lambda_*$ l'equazione $f(x) = x + \lambda$ ha due soluzioni (entrambe appartenenti all'intervallo $(-\infty, 1)$);
- se $1/2 < \lambda$ l'equazione $f(x) = x + \lambda$ ha tre soluzioni.

Dire se converge l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t}+1}{e^t-1}dt.$$

e, in caso affermativo, calcolarlo.

Posto $h(t) := \frac{e^{-2t}+1}{e^t-1}$ notiamo che h è continua su $[1, +\infty[$ e $h(t) \sim e^{-t}$ per $t \to +\infty$; pertanto l'integrale converge per il criterio del confronto asintotico.

Cambiando variabile $t = \log y$ otteniamo $dt = \frac{dy}{y}$ e quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t}+1}{e^t-1}dt = \int_e^{+\infty} \frac{1+y^2}{y^3(y-1)}dy.$$

Utilizziamo la scomposizione in elementi semplici

$$\frac{1+y^2}{y^3(y-1)} = -\frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}$$

ed otteniamo che

$$\int_e^{+\infty} \frac{1+y^2}{y^3(y-1)}dy = \left[\frac{1}{2y^2} + \frac{1}{y} - 2\log\frac{y-1}{y}\right]_e^{+\infty} = -\frac{e^{-2}}{2} - e^{-1} + 2 - 2\log(e-1).$$